EPFL

1

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Date : vendredi 20 décembre 2024
Durée : 210 minutes

Examen à blanc - Enoncé

NOM :

PRENOM :

N° SCIPER :

SECTION : **Mathématiques**

SALLE :

L'examen est constitué de 3 problèmes qui totalisent 39 points. Chaque problème comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques d'un problème doivent être effectués et rédigés proprement sur les pages quadrillées à la fin du problème.

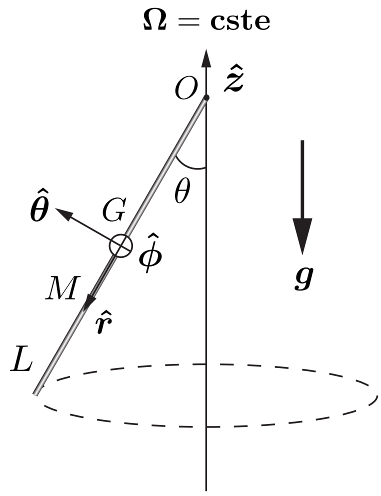
Consignes

- Préparer votre **carte Camipro**, la poser visiblement sur la table et vérifier votre **N° Sciper**.
- **Attendre** le début de l'épreuve **avant d'ouvrir** le cahier d'examen.
- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Un **dictionnaire bilingue** non annoté est autorisé pour les étudiant.e.s **non francophones**.
- Effectuer les **développements mathématiques et physiques** d'un problème sur les **pages quadrillées** à la fin du problème.
- Retranscrire les **réponses** sur les pointillés sous chaque question dans les espaces réservés à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Ne **pas dégrafer** le cahier d'examen et laisser le **tableau** et les **cases blanches vides**.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas ramassées** et **pas corrigées**.
- Il est recommandé de résoudre les questions **bonus** à la fin de l'examen si le temps le permet.

Problème 1 : **Barre en rotation** (9 points)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Laisser les cases blanches vides



Une barre indéformable et homogène de masse M, de longueur L, d'épaisseur e négligeable, i.e. $e \ll L$, est fixée à l'une de ses extrémité au point O. L'orientation de la barre fait un angle $\theta = \text{cste}$ avec l'axe vertical passant par l'origine O. La barre est en rotation autour de cet axe vertical à vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \Omega\, \hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{cste}$ où $\hat{\boldsymbol{z}}$ est le vecteur unitaire vecteur orienté vers le haut.

Pour décrire la dynamique de la barre en rotation, on considère deux référentiels, on choisit le repère d'inertie sphérique $\left(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre. Le moment d'inertie de la barre rapport à l'axe principal d'inertie radial $\hat{\boldsymbol{r}}$ passant par son centre de masse G est négligeable, i.e. $I_{G,r} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie nodal $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et azimutal $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ passant par son centre de masse G sont égaux et s'écrivent $I_{G,\theta} = I_{G,\phi} = \frac{1}{12}\, ML^2$. On considère qu'il n'y a pas de frottement.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M, de la longueur L, de la vitesse angulaire scalaire Ω, de la norme du champ gravitationnel g, de l'angle d'inclinaison θ et des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère sphérique et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**2 points**) Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\boldsymbol{L}_G$ de la barre évaluée par rapport à son centre de masse G en termes des grandeurs scalaires M, L, Ω, θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $\left(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$.

   $\boldsymbol{L}_G =$ ....

2. (**2 points**) Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O en termes des grandeurs scalaires M, L, Ω, θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $\left(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$.

   $\boldsymbol{L}_O =$ ....

3. (**3 points**) A l'aide d'un théorème de dynamique du solide indéformable, déterminer l'angle $\theta =$ cste que fait la barre avec l'axe de rotation vertical en termes de grandeurs scalaires constantes données dans l'énoncé.

   $\theta =$ ....

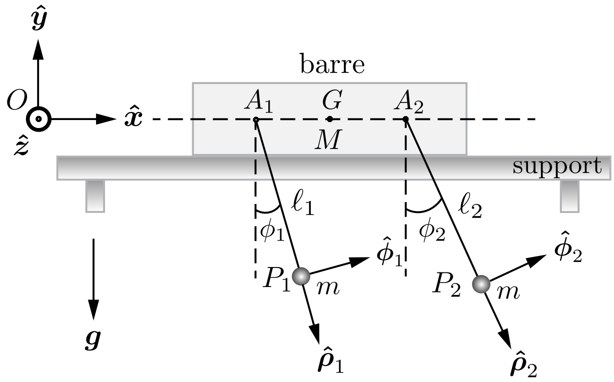
4. (**2 points**) Par rapport au référentiel d'inertie du sol, déterminer l'expression de l'énergie cinétique T de la barre en termes des grandeurs scalaires constantes M, L, Ω et θ.

   $T =$ ....

Problème 2 : Pendules couplés par une barre (17 points)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ☐16 ☐17

Laisser les cases blanches vides



Afin de modéliser la synchronisation de deux pendules mathématiques, on examine le modèle suivant : deux points matériels P_1 et P_2 de masses identiques m sont suspendus aux extrémités de deux fils inextensibles, de masses négligeables, de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 respectivement. Les fils sont attachés de manière symétrique aux points A_1 et A_2 d'une barre homogène indéformable de masse M et de centre de masse G. La barre peut glisser sur un support fixe horizontal sur lequel elle est posée. On suppose que le frottement entre la barre et le support est négligeable et que le frottement de l'air est également négligeable.

Afin d'étudier la dynamique du système, on considère deux référentiels : le référentiel absolu $\mathcal{R}$ du support fixe et le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre en mouvement. On choisit un repère cartésien absolu $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ d'origine O pour décrire le mouvement de la barre et deux repères cylindriques relatifs $(\hat{\boldsymbol{\rho}}_1, \hat{\boldsymbol{\phi}}_1, \hat{\boldsymbol{z}})$ et $(\hat{\boldsymbol{\rho}}_2, \hat{\boldsymbol{\phi}}_2, \hat{\boldsymbol{z}})$ d'origines A_1 et A_2 respectivement pour décrire le mouvement des deux pendules.

L'angle moyen ϕ_S et l'angle de déviation moyen ϕ_A des pendules sont définis comme,

$$\phi_S = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \qquad \text{et} \qquad \phi_A = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)$$

Les réponses doivent être exprimées en termes des masses m et M, des longueurs ℓ_1 et ℓ_2, de la norme du champ gravitationnel g, des angles ϕ_1 et ϕ_2, de la coordonnée horizontale du centre de masse de la barre X_G, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{\rho}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_2$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$, et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**1 point**) Déterminer la force inertielle $\boldsymbol{F}_i$ exercée sur les pendules dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre.

   $\boldsymbol{F}_i =$ ....

2. (**3 points**) Déterminer le vecteur tension $\boldsymbol{T}_i$ exercée sur le i^{e} pendule dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre.

   $\boldsymbol{T}_i =$ ....

3. (**1 point**) Montrer que les équations du mouvement des deux pendules s'écrivent,

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{\ell_1}\,\sin\phi_1 = -\,\frac{\ddot{X}_G}{\ell_1}\,\cos\phi_1 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{\ell_2}\,\sin\phi_2 = -\,\frac{\ddot{X}_G}{\ell_2}\,\cos\phi_2$$

4. (**3 points**) Si le système formé de la barre et des deux pendules est initialement au repos, montrer à l'aide d'un principe de conservation, que le système satisfait la relation,

$$\dot{X}_G = -\,\frac{m}{M+2m}\left(\ell_1\,\dot{\phi}_1\,\cos\phi_1 + \ell_2\,\dot{\phi}_2\,\cos\phi_2\right)$$

5. (**5 points**) Pour cette question et les suivantes, on fait l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $\phi_1 \ll 1$ et $\phi_2 \ll 1$, pour des pendules de même longueur, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2 = \ell$. Montrer que dans ce cas l'angle moyen ϕ_S et l'angle de déviation moyen ϕ_A ont un mouvement harmonique oscillatoire,

$$\ddot{\phi}_S + \omega_S^2\,\phi_S = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\phi}_A + \omega_A^2\,\phi_A = 0$$

   et déterminer la pulsation ω_S du mode propre symétrique et la pulsation ω_A du mode propre anti-symétrique.

   $\omega_S =$ ....

   $\omega_A =$ ....

6. (**4 points**) Déterminer les équations horaires pour les angles $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$, en fonction des pulsations ω_S et ω_A supposées connues, compte tenu des conditions initiales $\phi_1(0) = -\,\phi_2(0) = -\,\phi_0$ et $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$.

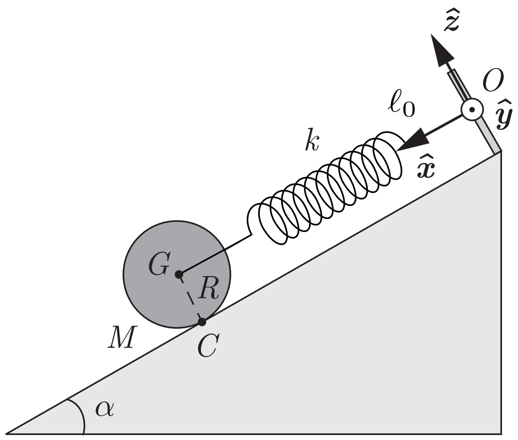
   $\phi_1(t) =$ ....

   $\phi_2(t) =$ ....

Problème 1 : Cylindre oscillant sur un plan incliné (13 points)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Laisser les cases blanches vides



On considère un cylindre plein, homogène, de rayon R et de masse M qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'axe de symétrie horizontal du cylindre qui passe par son centre de masse G est attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au sommet du plan incliné. Un mécanisme assure que l'axe du cylindre reste horizontal. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie passant par son centre de masse est $I_G = \frac{1}{2}\,MR^2$. L'origine O est prise au point d'attache du ressort au haut du plan incliné.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x, y et z, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$ du repère cartésien et de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**3 points**) Déterminer la norme et l'orientation du moment cinétique $\boldsymbol{L}_C$ du cylindre évalué par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné.

   $\boldsymbol{L}_C =$ ....

2. (**3 points**) Déterminer la norme et l'orientation de la résultante des moments de forces extérieures $\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}}$ évaluée par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné explicitement en fonction de M et k.

   $\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} =$ ....

3. (**3 points**) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre et en déduire la période d'oscillation T.

   ....

   $T =$ ....

4. (**2 points**) Déterminer l'évolution temporelle $X_G(t)$ de la coordonnée d'abscisse du centre de masse du cylindre compte tenu des conditions initiales suivantes,

   $$X_G(0) = R + \ell_0 + \frac{Mg}{k}\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \dot{X}_G(0) = 0$$

   $X_G(t) =$ ....

5. (**2 points**) Déterminer l'évolution temporelle $F_s(t)$ de la composante de la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s(t) = F_s(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$ exercée par le plan incliné sur le cylindre en fonction de la coordonnée de position du centre de masse $X_G(t)$.

   $F_s(t) =$ ....